Erősen kapcsolódó gráfok, és fekete-fehér 2SAT problémák egyenlősége

Bíró Csaba és Kusper Gábor

*Átvéve 2016 November 9.*

Absztrakt: a mi célunk hogy olyan propozíciós logikai formát csináljunk, amivel lemodellezünk egy irányított gráfot és SAT megoldóval elemezzük. Ez a modell hasonlít a jól ismert Aspvall et al.-ra, de ők 2SAT problémából csináltak irányított gráfot, mi pont ellenkezőleg 2SAT problémából csinálunk irányított gráfot. Az ő rovatukban, ha a 2SAT probléma nem kielégíthető akkor a belőle készített gráfnak is erősen összetettnek kell lennie „Strongly Connected”. A mi esetünkben, ha az irányított gráf erősen összetett, akkor a legenerált 2SAT, fekete-fehér probléma, aminek két megoldása van: ha minden változó igaz (fehér hozzárendelés), és hogyha mindegyik hamis (fekete hozzárendelés). Ha azt mondjuk, hogy a kiválasztott irányított gráf legyen egy kommunikációs hálózat modellje, akkor feltehetjük a kérdést, „Egy csomópont képes üzenetet küldeni egy másik csomópontnak a hálózaton keresztül?” Még pontosabban, „Minden csomópont tud üzenetet küldeni minden másiknak?”, azaz erősen összefüggő a gráf, vagy sem.

1. Bemutatkozás

A propozíciós kielégíthetőség problémája, hogy egy képletet határozhassunk meg propozíciós logikához az az, hogy van-e igazságérték hozzárendelése a változókhoz, amelyeket ez a képlet igaznak értékel. SAT alatt azt a propozíciós kielégíthetőségi problémát értjük, amely formulák konjunktív normál formában vannak (KNF). A SAT kérdés az egyik legtöbbet kutatott NP teljes probléma a számítógép tudomány terén, beleértve a teoretikus számítógép tudományt, mesterséges intelligenciát, hardver dizájnt, és a hivatalos ellenőrzést. A modern szekvenciális SAT megoldók a Davis-Putnam-Logemann-Loveland (DPPL) algoritmuson alapszanak. Ez az algoritmus Boolean változó bővítést (BCP) hajt végre, és változók elágazását, azaz minden csúcson a keresőfában kiválaszt egy választó változót, ami igaz értéket rendel hozzá, és konfliktus esetén tesz egy lépést hátra.

K-SAT alatt azon képletek propozíciós elégedettségének problémáját értjük CNF-ben, amelyeknek minden klóz legfeljebb K literálból áll. Miközben a 2SAT problémák lineáris időben megoldhatóak, a 3SAT problémák NP teljesek. Napjaink legígéretesebb ágazata a Langlands program esetén, ami az algebrai szám teóriát összekapcsolja az automorf formáival, és ábrázolás elmélettel. Egy másik jó példa a modularitás (formálisan Tanuyama-Shimura-Weil konjektura), ami azt állítja, hogy az elliptikus görbéken túl a racionális számok halmaza kötődik a moduláris formákhoz. A moduláris tétel nélkül Andrew Wiles nem tudta volna bizonyítani Fermat utolsó tételét.

Ebben a cikkben kapcsolatot mutatunk be irányított gráfok és propozíciós logikai képletek között. Bebizonyítunk egy teóriát, ami megengedi egy algoritmus használatát a propozíciós logika halmazából, hogy leellenőrizzük a gráf tulajdonságait. Nevezetesen átátalakítunk egy gráfot egy SAT problémává, hogy leellenőrizzük, hogy a gráf erősen összetett, vagy sem.

A legkiemelkedőbb grafikonábrázolások a következők:

* Az implikációs gráf egy ferde-szimmetriás irányított gráf, ahol a csúcsok literálok (Boolean algebrai változók, és az ő negáltjai), ahol az élek implikációt jelentenek. Jegyezzük meg, hogy a bináris klózok jelenti a két implokációt az implikációs gráfban: , és és ebből adódóan az implikációs gráf ferde-szimmetriás gráf, azaz izomorf a saját transzponáltjára.
* Az AIG (And-Inverter Graph), magyarul És-Invertáló Gráf egy irányított aciklusos gráf, ahol a csúcsok logikai konjukciók két bemenő éllel, az egyik negálással megjelölt, bemenetként Boolean változókat adunk meg, kimenet pedig a képlet lesz.
* A BDD (Reduced Ordered Binary Decision Diagram), magyarul redukált sorrendű bináris döntés diagramm egy gyökeres, irányított, aciklusos csúcsokból álló gráf, amik Boolean változók és terminális csúcsok, amit 0 terminálónak hívunk, ami terminálja az utakat ahol a képlet hamisnak értékelődik; és 1 terminálónak hívjuk, ami terminálja az utakat ahol a képlet igaznak értékelődik. Minden nem terminális csúcsnak két gyermek csúcsa van, amit alsó gyermeknek hívunk, ennek megfelelő élt 0 élnek hívjuk; és a magas gyereknek megfelelő élt 1 élnek hívjuk; amik a lehetséges értékei a szülő csúcsnak. Muszáj bármilyen izomorf algráfot összeolvasztania és megszüntetni bármelyik csúcsot, amelyiknek két izomorf gyermeke van.
* A ZDD vagy ZBDD (Zero-Suppressed Binary Decision Diagram), magyarul nullára szorított bináris döntés diagramm egy fajta bináris döntés diagramm, ami a „szűntesd meg bármely csúcsot, aminek két gyermeke izomorf” szabály helyett a „szűntesd meg azokat a csúcsokat, aminek 1 éle pontosan egy 0 terminálóra mutat” szabályt használja. Ha egy SAT problémának csak pár megoldása van, akkor a ZDD jobban bemutatja, mint a BDD.

Amint láthatjuk, nagy erőfeszítések történtek a képletektől a gráfokig tartó irányban. Ebben a cikkben a másik utat tanulmányozzuk, a gráfoktól a képletekig tartó irányt. A mi modellünkben a csúcsok Boolean változók, és az élek implikációk. Ez azt jelenti, hogy a mi modellünk hasonló az implikációs gráfhoz, de az implikációs gráfok esetében a csúcsok literálok. Az intuíció a mi modellünk esetében a vezeték nélküli szenzorok (WSN – Wireless Sensor Network) halmazából jön, ahol releváns probléma, hogy a egyes szenzorok kommunikálni tudjanak egymással a hálózatban. Ha a hálózat egy irányított gráffal van reprezentálva, ahol a csúcsok a szenzorok, az élek pedig a szenzorok közti adat kommunikációt reprezentálják, akkor ez a probléma leegyszerűsödik arra, hogy csak azt kell leellenőrizzük, hogy a gráf erősen összetett-e.

Ezt a problémát SAT megoldóval akartuk megoldani, ezért át kell alakítanunk a fentebbi irányított gráfot egy SAT problémává. Mivel a mi modellünkben minden él egy logikai implikációt jelent, ezért legenerálhatunk egy 2-SAT problémát, ahol minden klóznak pontosan egy pozitív és egy negatív literálja van.

Rájöttünk, hogy erősen összetett, ha ennek a 2-SAT problémának pontosan két megoldása van: az első az ahol minden egyes Boolean változó igaz (amit fehér hozzárendelésnek hívunk), a második pedig az, ahol minden egyes Boolean változó hamis (amit fekete hozzárendelésnek hívunk). Az ilyen SAT problámát „fekete-fehér” SAT problémának hívjuk.

Ez azt jelenti, hogy ha hozzáadjuk a negációját a két megoldásnak (a feketéjét és a fehérét), a generált SAT problémához, akkor nem lesz kielégíthető és 2-SAT sem.

Más szóval egy SAT probléma fekete-fehér SAT probléma akkor és csak akkor, ha kielégíthető és van két megoldása, a fehér hozzárendelés és a fekete. Tehát ha nem kielégíthető lesz, amikor hozzáadjuk a negáltját ezeknek a hozzárendeléseknek, ami két teljes hosszú klóz az, amelyik klóz csak negatív literálokat tartalmaz (fekete klóz), és amelyik klóz csak pozitív literálokat tartalmaz (fehér klóz).

Az irányított gráfok halmazában az erős kötöttség problémáját leellenőrizni egy lineáris idejű probléma. A fekete-fehér 2-SAT probléma is lineáris idejű probléma, ahogy azt később bemutatjuk ebben a cikkben. Az a kérdés következik, hogy miért kéne gráffá alakítanunk egy SAT problémát, hogy leellenőrizzünk egy tulajdonságot, amikor mindkét halmazban ugyan annyi idő? Úgy gondoljuk, hogy a mi modellünk egy új kapcsolat a két halmaz közt: Tanultuk, hogy a f-f 2-SAT probléma és az erősen összetett gráf egyenlők. A f-f SAT probléma feltűnik egy speciális gyenge nemeldönthető SAT probléma eseteként is, lásd a 6. Lemmában (abban a cikkben nem használtuk a „fekete-fehér SAT probléma” kifejezést, csak ebben a cikkben lett bevezetve). Ez két dolgot javasol: a f-f SAT probléma érdekes lehet általában, és mivel vannak gyenge nemeldönthető 3-SAT problémák, amik úgy szint f-f, létezhet egy  
3-SAT reprezentációja az irányított gráfoknak.

1. Az irányított gráf logikai modellje

Legyen egy irányított gráf, ahol csúcsok halmaza, és az élek halmaza. egy kommunikációs gráf, 🡺ha a elemei atomi formulák, vagy minden csúcs egy másik atomi formulával van jelölve. Jegyezzük meg, hogy bármely irányított gráf kommunikációs gráf, mivel minden csúcsot meg tudunk címkézni egy másik atomi formulával. Más szóval, ha eleme -nek, akkor például a nem lehet eleme a -nek. Egy kommunikációs gráfból létre tudjuk hozni a következő modellt: A csúcsokat Boolean változókkal jelöljük, és a csúcsok logikai implikációk. A konjugáltja ezeknek a formuláknak megadja, az irányított gráf logikai modelljét. Például, ha egy csúcs -nek vannak élei és csúcsokba, akkor a logikai modell:

Ez a formula könnyedén transzformálható 2SAT problémává az implikációk újra írásával, a következő szabályt alkalmazva . Jegyezzük meg, habár minden él -ben egy logikai implikációként van értelmezve, attól még nem implikációs gráf, hiszen nem tartalmaz negatív literálokat. (Nem Aspvall-ét használjuk.) Ők egy gráfot csinálnak 2SAT problémából, mi 2SAT problémából kommunikációs gráfot. Az ő irányított gráfjukban minden változó pozitív és negatív literálokkal van reprezentálva. A mi esetünkben csak pozitív literálok vannak az irányított gráfban.

A modellünk definícióját sokkal formálisabban adtuk meg. A 2SAT reprezentálása kommunikációs gráf esetén így lesz definiálva:

Jegyezzük meg, hogy egy 2SAT probléma és remek tulajdonsága, hogy minden klóznak, ami benne van pontosan egy pozitív és egy negatív literálja van, vagyis kielégíthető. Legalább két megoldása van: egyik, ahol minden változó igaz, ami a fehér hozzárendelés, és a másik, ahol minden hozzárendelés hamis, amit fekete hozzárendelésnek hívunk.

Ha -nek csak két megoldása van, és nincs másik, akkor -nek egy érdekes tulajdonsága, nevezetesen hogy erősen összetett. Hogy ezt leellenőrizzük, szükségünk van a fekete vagy fehér megszorításra, ami a fehér hozzárendelés és a fekete hozzárendelés diszjunkciója, ami azt állítja hogy minden csúcs elérhető bármely másikból. Megjegyezzük, hogy a fehér, vagy fekete megszorítás ebben a cikkben a következő képpen van definiálva:

Ennek a negáltját fekete és fehér megszorítása, ami a fekete klóz és a fehér klóz konjugáltja:

A formula által azt állítjuk, hogy minden csúcsból vezet út bármely másikba. erős kötöttségét be tudjuk mutatni azzal, hogy a logikai reprezentációja -nek , ami implikálja -t. Most pedig tudjuk használni a tényt, miszerint SAT megoldás kétszer gyorsabb a teória igazolásnál. Tehát ahelyett hogy igazolnánk, miszerint „ erősen összetett, ha implikálja -t” helyette igazoljuk, hogy „ erősen összetet, ha nem kielégíthető”. Ez azt jelenti, hogy használhatunk SAT megoldót, hogy egy gráf tulajdonságait ellenőrizzük.

Ez által motiválva a következő fogalmat vezetjük be: fekete-fehér SAT probléma, 🡺 ha kielégíthető, és pontosan két megoldása van; a fekete és a fehér hozzárendelések, amik implikálják, hogy nem kielégíthető. fekete-fehér 2SAT probléma, 🡺 ha az 2SAT probléma és fekete-fehér SAT probléma is. A 6. lemma 3. pont javasol egy alternatív, még általánosabb definíciót: egy fekete-fehér SAT probléma, 🡺 ha kielégíthető, és pontosan két megoldása van. és , úgy hogy . De mi ebben a cikkben nem ezt az alternatív definíciót használjuk.

Először kell nekünk egy segéd lemma, ami azt állítja, hogy van út csúcsba, 🡺 ha -t a gráf logikai modellje magába foglalja.

**1. Lemma** legyen egy kommunikációs gráf. legyen -nek a 2SAT reprezentációja. implikálja formulát, 🡺 ha csúcsba van út a gráfban.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy egy különleges SAT példa, ahol minden klóz pontosan egy pozitív és egy negatív literált tartalmaz, habár minden klóz megoldása -ből egy bináris klóz egy pozitív és egy negatív literállal. A fő ötlete az igazolásnak, hogy ha van két klózunk és -ben van egy út , akkor rezolúciót használva csinálhatunk egy klózt.

Ezen a lemmán alapozva igazolhatjuk a fő teóriáját ennek a cikknek, miszerint a fogalom erősen összetett gráf, ha a fogalom fekete-fehér 2SAT problémák egyenlők. Ez azt jelenti, hogy a 2SAT reprezentációja egy erősen összetett gráfnak egy fekete-fehér 2SAT probléma, és ugyan ez fordítva. Az irányított gráf reprezentációja a fekete-fehér 2SAT problémának egy erősen összetett gráf.

**Theorem 1.** egy kommunikációs gráf. egy 2SAT reprezentációja -nek. Tehát fekete—fehér 2SAT probléma, 🡺 ha a gráf erősen összetett.

Bizonyítás. legyen egy kommunikációs gráf. legyen a 2SAT reprezentációja -nek. Megmutatjuk, hogy mindkét irány betartható.

A fő ötlete a bizonyításnak a következő. Ha a formula kielégített egy SAT probléma minden megoldásával, akkor implikálva van ez által a SAT probléma által. Tudjuk, hogy -nek csak két megoldása van, a fekete és a fehér hozzárendelés, mindkettő kielégíti minden formájú formulákat, azaz implikálja őket. Ebből, és az 1. Lemma-ból teremtjük, hogy -ben minden csúcsból vezet út minden másik csúcsba, azaz erősen összetett.

: A fő ötlete az igazolásnak, hogy mivel erősen összetett, ezért tudjuk hogy van út ami ciklikus, és tartalmazza összes csúcsát, a hozzá tartozó klóz halmaz: , ami egy részhalmaza -nek, és ami kielégíthető csakis a fekete és fehér hozzárendelésekkel. Ebből adódóan, és hogy minden egyes klóz -ben egy bináris klóz, ebből teremtjük, hogy egy fekete-fehér 2SAT probléma.

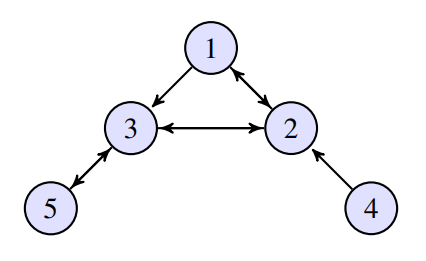
Hogy leellenőrizzük az irányított gráf erősen összetett, vagy sem, lineáris időre van szükségünk. Bebizonyítjuk, hogy a 2SAT reprezentációja is megoldható lineáris időben.

**Theorem 2.** legyen egy fekete-fehér 2SAT probléma. Ezután lineáris időre van szükség, hogy bebizonyítsuk kielégíthetetlen.

Bizonyítás. A fő ötlete a bizonyításnak. hogy bármilyen SAT megoldó, amelyik változó elágazást használ és BCP, az megmutatja, hogy nem kielégíthető 1 változó elágazással, és 2 BCP lépéssel a következő képpen: A változó elágazás egy egységben adjon eredményt. Anélkül, hogy az általánosítást elvesztenénk, feltételezzük, hogy ez egy pozitíveset. Ezután a BCP legenerálja a másik pozitív egységeket, mert a bináris klózok -ben pontosan egy pozitív és egy negatív literált tartalmaznak. BCP végül konfliktust eredményez, mert tartalmazza a fehér hozzárendelés negáltját. Ezután a másik elágazás fog negatív egységgel végződni. Ez lehetővé tesz egy BCP lépést, ami legenerálja a negatív egységeket, és ami konfliktusban ér véget, mivel -ben ugyan úgy a fekete hozzárendelés negáltja lesz. Amióta BCP egy időben lineáris metódus, ezért lineáris időre van szükségünk, hogy bebizonyítsuk, hogy kielégíthetetlen.

Jegyezzük meg, hogy a DPLL algoritmus alkalmas választás arra, hogy megoldjuk a fent problémát, mert változó elágazást használ és BCP-t. A kérdés az, hogy miért kéne a gráfot SAT problémává alakítani, hogy egy tulajdonságát leellenőrizzük, amit leellenőrizhetünk lineáris időben mindkét halmazon? Úgy gondoljuk, hogy a mi modellünk egy új kapcsolat a két terület közt, ami lehet segítene a SAT problémák vizualizálásában. Ez nem probléma 2SAT esetén, de 3SAT-ban igen. Ha valaki megtalálja azt a reprezentációt, akkor segíthetne vizualizálni a 3SAT problémát, irányított gráffal.

1. A mi modellünk, és az Aspvall modell

Ebben a részben megmutatjuk, hogy a megszorítás, amit a modellünk használ, az általánosabb, mint amit Aspvall et al. Először mutatunk pár példát. Az 1. Alakzaton láthatunk egy irányított gráfot, 5 csúccsal. Ez a gráf egy kommunikációs gráf is, amióta nincs negációs jel semelyik csúcsban. Egy irányított gráf erősen összetett, ha van út az összes csúcs pár közt. Egy erősen összetett komponense az irányított gráfnak, az legfeljebb egy erősen összetett részgráf. Csak 2 erősen összetett komponense van ([1,2,3,5],[4]) a következő gráfnak.

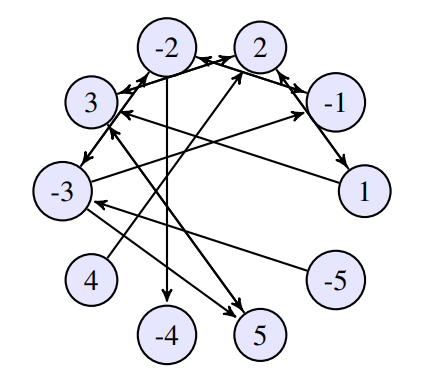
1. Alakzat: Egy irányított gráf 5 csúccsal

A gráf modellje:

-ből tudunk csinálni -t, ha követjük a felépítést, amit Aspvall et al. definiált, akkor a következőek a lépések:

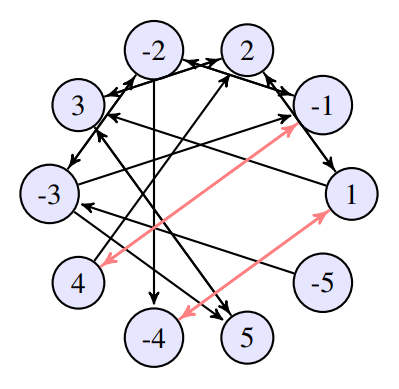
1. Minden váltorzóhoz , hozzáadunk két csúcsot, amit -nek és -nek hívunk -nek.
2. Minden klóz -nek adunk éleket -nek.

A 2. Alakzaton láthatjuk a átalakított gráfot. Aspvall et al. teóriája mutatja, hogy kielégíthető, 🡺 ha -ben nincs olyan csúcs, ami ugyan abban az erősen összetett komponensben van, mint annak komplemense . Biztosak lehetünk benne, hogy ez a tulajdonsága kitart a mi modellünkben, mert mindig kielégíthető.

2. Alakzat: , ahol

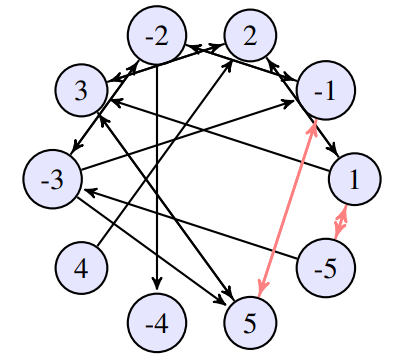
Definiáljuk az úgy nevezett Aspvall féle megkötéseket.

Legyen , ahol . Ebből azt hozzuk létre, miután leegyszerűsítettük, hogy . Hozzá adhatjuk ezeket a klózokat a modellhez, hogy leellenőrizzük, hogy vannak-e irányított utak csúcsból csúcsba, és fordítva: .

Adjunk két megkötést adunk az 1. Alakzathoz. Az első . Legyen . Tehát hozzáadjuk ezt a két klózt, és ezt a 4 élet, lásd a 3. Alakzaton. Láthatjuk rajta, hogy a gráfban nem létezik csúcs, ami ugyan abban az erős komponensben lenne, mint a komplementere , ezért még mindig kielégíthető.

3. Alakzat: , ahol

Adjuk hozzá . Legyen . Így hozzáadjuk ezt a két klózt és ezt a 4 élet. Lásd a piros nyilak a 4. Alakzaton. Láthatjuk rajta, hogy a gráfban. létezik egy csúcs, ami ugyan abban az erős komponensben van, mint a komplementere , azaz kielégíthetetlen.

A mi megközelítésünkben :

4. Alakzat: , ahol

Egyszerűsítés után a következő:

Bármely -re és -re van egy , amit implikál , azaz tartalmazza -t. Ez azt jelenti, hogy definiál egy erősebb megszorítást a modellre, így definiál egy általánosabb megszorítást, mint hogy leellenőrizze, hogy a gráf erősen összetett, vagy sem.

1. Egy alkalmazása
   1. Vezeték nélküli hálózatok

Az ad hoc vezeték nélküli hálózatokat (WSN) széles körben használják (például katonaság használja, hogy megfigyelje a környezetet). Előnyük, hogy olyan érzékelőkből állnak, amiknek kevés az energiafogyasztásuk, olcsón és könnyen letelepíthetőek olyan helyeken is, amik kívül esnek a hatósugarunkon. Ezek az érzékelők a csomópontjai a WSN-nek. Képesek feldolgozni korlátozott mennyiségű információt, és vezeték nélküli hálózaton kommunikálni. Habár sok WSN megoldás van, az eszközök elhelyezése mai napig egy aktív kutatási terület.

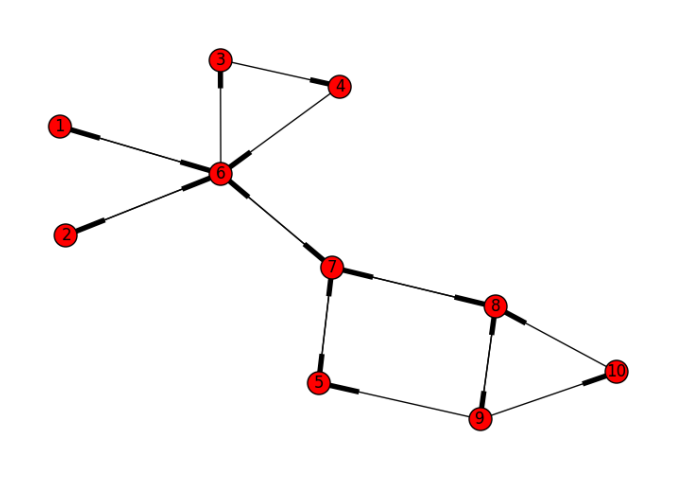
Egyik fontos tulajdonsága egy ad hoc vezetéknélküli hálózatnak, a csomópont sűrűsége. A sűrű elhelyezés a következő tulajdonságokat teszi lehetővé: magas hibatűrés, magas karakterisztika lefedettség, de ugyan akkor okoz néhány problémát is. Az interferencia magas a sűrű csomópontok körül, és sok ütközés történik üzenet küldés esetén, ami bonyolult MAC protokoll szerinti műveletek végzését igényli. Mivel túl sok lehetséges út van, az útválasztás rengeteg forrást igényel.

A megfigyelési technikák célja, hogy csökkentse a költségeit a megosztott algoritmusoknak a hálózaton értelmezve. A gráf, ami a hálózatot jelképezi, ritkítani kell, olyan költségcsökkentő technikákkal, mint a csomópontok lecsatlakoztatása, kapcsolatok törlése, hatósugár változtatása, stb., de a hálózat minőségi karakterisztikái (úgymint méretezhetőség, lefedettség, hibatolerancia, stb.) nem eshetnek egy szükséges szint alá. Minden felett a cél az, hogy egy méretezhető, hibatűrő, ritka topológiát hozzunk létre, ahol csomópontok száma alacsony, a legnagyobb terheltség és az energiafogyasztás alacsony, valamint rövidek a távolságok, utak. A következő technikákat használjuk, hogy optimális topológiát alakítsunk ki: csökkentjük a csomópontok hatósugarát, kiveszünk pár csomópontot, bemutatjuk domináns csomópontok halmazát, fürtösítünk, és hozzáadunk néhány új csomópontot, hogy tudjon mindenki mindenkivel kommunikálni.

* 1. Kapcsolódási teszt SAT ábrázolással

Ha van egy WSN-ünk, akkor újra definiálhatjuk a kommunikációs gráfunkat a következő képpen. Azt mondjuk, hogy egy kommunikációs gráf, 🡺 ha elemei, a csúcsok, amik jelképezik a WSN érzékelő csomópontjait, és elemeit, az éleket, amik az egy irányú kommunikációt jelképezik két csomópont között.

Szándékunkban áll megvizsgálni, melyik érzékelők tudnak egymással kommunikálni, így tudunk csinálni egy kommunikációs gráfot, és annak 2SAT-os reprezentációját. Ebben a megközelítésben leellenőrizhető, viszonylag gyorsan, hogy egy adott állapotban egy véletlenszerűen megosztott érzékelő hálózatban (feltételezve, hogy minden érzékelő aktív) biztosítható-e vagy sem, hogy az összes érzékelő tud kommunikálni minden másikkal.

Például legyen a modellünk egy véletlenszerűen megosztott heterogén érzékelő hálózat 10 csomóponttal.

5. Alakzat: Heterogén érzékelők vezeték nélküli csomópontja,  
a kommunikációs gráfjukkal.

Az ábrázolás érdekében a SAT megoldónak bemeneti klóz halmazt a DIMACS CNF formátumban adtuk meg, ami általánosan van használva, és a Boolean változókra hivatkozik (1-es alapon) indexelve. A negatív literálokra az annak megfelelő negált változóval hivatkozunk. Egy klóz egy számsorral hivatkozik a literáljaira, ami „0”-ra végződik, így van bemutatva.

DIMACS CNF formátum a következő: p cnf 10 20

c modell

-1 6 0

-6 1 0

-2 6 0

-6 2 0

-6 3 0

-3 4 0

-4 6 0

-5 6 0

-6 7 0

-7 6 0

-5 7 0

-7 5 0

-7 8 0

-8 9 0

-9 8 0

-9 10 0

-10 8 0

-9 5 0

c constraint

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 0

-1 -2 -3 -4 -5 -6 -7 -8 -9 -10 0

A fő célunk, hogy megvizsgáljuk az előállított DIMACS CNF fájlt a MiniSat 2.2.0-val, ami egy teljes SAT megoldó, ami kielégíthetetlent (UNSAT) eredményez. Így a modell kiteljesíti a követelményeket, nevezetesen a kommunikáció biztosított bármely két csomópont közt. Ebben a példában az eredmény UNSAT, így a bemutatott kommunikációs gráf erősen összetett.

Ez a modell egy részletesebb elemzést is tud adni nekünk. Például, ha kivisszük az érzékelőket a modellből egyesével, és a maradékkal leteszteljük bármely két csomópont között a kommunikációs problémákat újra. Ha a megoldó kielégíthetőséget eredményez (SAT) a csökkentett modellre, akkor a jelenleg kivett csomópont hihetetlen fontos az érzékelő hálózatban, ahogyan a kivétele a hálózatból megszegi az akadálytalan kommunikáció szabályát bármely két érzékelő közt, A jelentőségé ebben a gráfelméletben az, hogy az eltávolítása ennek a csomópontnak nem összekötötté teszi a gráfot. A mi példánkban a 3, 4, 5, 6, 7, 8, és a 9-es csomópontoknak a kivétele SAT-ot eredményezne, így azoknak az érzékelőknek a meghibásodása az érzékelő hálózaton a kommunikáció nem megfelelő működését eredményezné.

Általában igaz, hogy ha a gráf erősen összetett, akkor a DPLL alapú SAT megoldók visszatérési értékei a következőek:

* Megoldások száma: 0
* Konfliktusok száma: 0
* Választások száma: 1
* Egységnyi terjedések száma: , ahol a literálok száma (csúcsok száma)

Ezek eredmények azt is mutatják, hogy a fekete-fehér 2SAT probléma a fekete-fehér megszorításokkal megoldható lineáris időn belül, mivel a választások , és az egységnyi terjedések száma .

1. Következtetés, és tervezett munkák

Ebben a cikkben bemutattuk a SAT ábrázolást, amit irányított gráfok lemodellezéséhez lehet használni. Az egyetlen megszorítás az, hogy a csúcsok neve Boolean változó legyen. Ez a modell, ami egy 2SAT probléma, lehetővé teszi, hogy leellenőrizzük egy gráf erős összetettségét azzal, hogy két klózt adunk hozzá, a feketét és a fehéret, valamint megkérdezünk egy SAT megoldót, hogy ez a formula UNSAT-e. A két klóz megszorítás, ami azt állítja, hogy nincs út bármelyik csúcsból bármelyik másikba. Ez a megszorítás sokkal általánosabb mint az Aspvall et al. által használt. Megmutattuk hogy az erősen összetett gráf ábrázolása egy fekete-fehér 2SAT probléma. A fekete-fehér SAT probléma is feltűnik, egy speciális eseteként a gyenge határozatlan SAT problémának, lásd a 6. Lemma-ban. Ez két javaslatot vet fel: a fekete-fehér SAT probléma általánosságban is érdekes lehet, és amióta gyenge határozatlan 3SAT problémák is léteznek, amik ugyan úgy fekete-fehér SAT problémák, lehet van 3SAT ábrázolása az irányított gráfoknak. A mi modellünk alkalmazható természetes módon az érzékelő hálózatokban úgy, mint vezeték nélküli érzékelő hálózatokban. Ha használjuk a SAT megoldót, hogy megoldjuk vele a mi modellünket, akkor nem csak a megoldást adja vissza, de egy csomó számot is. Egy érdekes kérdés, hogy mit tudnak ezek a rendszerek, mint a *megoldások száma, konfliktusok, döntések, egységnyi terjedések* mondani a gráf topológiájáról.

Úgy tűnik, hogy a következő általános fogalmak is érdekesek: egy általánosított fekete-fehér SAT probléma, 🡺 ha kielégíthető, és bármely hozzárendelés : ha egy megoldása -nek, akkor -nek van egy másik megoldása , úgy hogy . Például az üres klóz halmaz egy általánosított fekete-fehér SAT probléma. Egy másik érdekes példa, a fekete és fehér klózok halmaza. Ezeket a fogalmakat későbbi tanulmányokban fogjuk vizsgálni.